

Задача 17. Пусть K - функция ковариации случайного процесса второго процесса $X_t, t \in T, a \in T$. Доказать равенство

$$\|X_t - X_a\|^2 = K(t, t) - K(t, a) - K(a, t) + K(a, a) + (EX_t - EX_a)(E\bar{X}_t - E\bar{X}_a)$$

Доказательство:

Воспользуемся доказанным представлением функции ковариации: $K(s, t) = E[X_s \bar{X}_t] - EX_s \times E\bar{X}_t$ и раскроем скобки в правой части доказываемого равенства:

$$\begin{aligned} & E(X_t \bar{X}_t) - EX_t \times E\bar{X}_t - E(X_t \bar{X}_a) + EX_t \times E\bar{X}_a - E(X_a \bar{X}_t) + EX_a \times E\bar{X}_t + E(X_a \bar{X}_a) - \\ & - EX_a \times E\bar{X}_a + EX_t \times E\bar{X}_t - EX_t \times E\bar{X}_a - EX_a \times E\bar{X}_t + EX_a \times E\bar{X}_a = \\ & = E(X_t \bar{X}_t) - E(X_t \bar{X}_a) - E(X_a \bar{X}_t) + E(X_a \bar{X}_a) = E[(X_t - X_a)(\bar{X}_t - \bar{X}_a)] = \|X_t - X_a\|^2 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.